УДК 621.87:681.5

БІЛІНІЙНІ КЕРОВАНІ СИСТЕМИ В ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ КРАНОМ

©Григоров О. В., Окунь А. О., Лось Є. О.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Інформація про авторів:

Григоров Отто Володимирович: ORCID: 0000-0003-4332-4884; ottow@kpi.kharkov.ua; доктор технічних наук; завідувач кафедри підйомно-транспортних машин і обладнання; Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут; вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002, Україна.

Окунь Антон Олександпрович: ORCID: 0000-0002-6467-4229; okunanton@gmail.com; асистент кафедри підйомно-транспортних машин і обладнання; Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут; вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002, Україна.

Лось Євген Олександрович: ORCID: 0000-0002-2565-0945; 2251741@gmail.com; аспірант кафедри підйомно-транспортних машин і обладнання; Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут; вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002, Україна.

У статті розглядається двомасова динамічна модель руху «візок – вантаж» для мостового крана із змінною довжиною підвісу. Поставлена задача щодо знаходження оптимального за часом керування краном, який перевозить вантажі з однієї початкової точки до кінцевої. Розглянуто два нових підходи щодо розв’язання такої задачі. У першому випадку, коли припускалося, що довжина підвісу змінюється за деяким наперед заданим законом, модель залишалася лінійною, однак система, котра описувала її рух, становилася системою із змінними коефіцієнтами. У другому випадку, коли припускалося, що довжиною підвісу можна керувати, модель набувала вигляду так званої біафінної системи. У випадку, коли довжина підвісу – заздалегідь відома кусково-лінійна функція, отримано розв’язання рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами, до якого зводилася система, котра описувала модель руху «візок – вантаж» для мостового крана. У розгляді відповідної біафінної системи не вдалося за допомогою використаних в роботі факторів показати факт керованості системи на всьому просторі. Для отримання позитивних результатів необхідно подальше дослідження біафінних та білінійних систем.

Ключові слова: біафінна система; модель «візок – вантаж»; коливання вантажу; оптимальне керування; білінійна система.

Григоров О. В., Окунь А. А., Лось Е. А. «Билинейные управляемые системы в задаче управления краном».

В статье рассматривается двухмассовая динамическая модель движения «тележка – груз» для мостового крана с переменной длиной подвеса. Поставлена задача о нахождении оптимального по времени управления краном, который перевозит грузы из одной точки в другую. Рассмотрено два новых подхода к решению такой задачи. В первом случае, когда предполагалось, что длина подвеса изменяется по некоторому наперёд заданному закону, модель осталась линейной, однако система, которая описывала её движение, становилась системой с переменными коэффициентами. Во втором случае, когда предполагалось, что длиной подвеса можно управлять, модель приобретала вид так называемой биафинной системы. В случае, когда длина подвеса – заранее известная кусочно-линейная функция, получено решение уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, к которому сводилась система, описывающая движение модели. В рассмотрениях же соответствующей биафинной системы не удалось с помощью использованных в работе факторов показать факт управляемости системы на всём пространстве. Для получения положительных результатов необходимо дальнейшее исследование биафинных и билинейных систем.

Ключевые слова: биафинная система; модель «тележка – груз»; колебания груза; оптимальное управление; билинейная система.

Grigorov O., Okun A., Los Ye. "Bilinear control systems for a problem of optimal crane control".

The paper deals with two-mass dynamic "trolley – cargo" movement model that represents operation of an overhead crane with a variable length rope. A problem of finding the optimal time control of the overhead crane, carrying loads from one point to another, are set. Two new approaches to solve this problem are suggested and considered. For the first approach, when it is assumed that the rope length is varying according to some predetermined law, the model remains in a linear form, but the system, describing its motion, turns into the system with variable coefficients. For the second approach, assuming that the rope length can be controlled, the model reduces to the form of the so-called biaffine system. It is obtained a solution of the second order equation with variable coefficients for the case when the rope length is a piecewise linear function that is known in advance. Under consideration of the corresponding biaffine system with the factors used in the work we have not been able to show the fact of system controllability over the entire space. Further research of the biaffine and bilinear control systems is required to obtain positive results.

Key words: biaffine system; "trolley – cargo" movement model; cargo oscillations; optimal control; bilinear system.

1. Вступ та аналіз публікацій

У даній роботі розглядається двомасова модель «візок - вантаж» для крана зі змінною довжиною підвісу. Розв'язується задача про переміщення вантажу із заданої точки в іншу за оптимальний час.

Питання побудови оптимального керування в моделі «візок - вантаж» з постійною довжиною підвісу докладно розглянуті в [1]. За допомогою принципу максимуму Понтрягіна отриманий вид оптимального керування й точки його перемикання, таким чином, у випадку постійної довжини підвісу завдання повністю вирішене.

Однак подальший розгляд цієї моделі був пов'язаний в основному з ускладненням дисипативної функції в рівнянні. Враховувалося тертя кочення візка уздовж несучого каната, втрати на тертя в підшипниках коліс, сила вітру [2, 3]. Також розглядалося уточнення моделі, що враховувало кривизну несучого каната (для кабельного крана) [4]. Однак у результаті літературного аналізу не виявлено спроб одержання виду оптимального керування для таких ускладнених систем.

Крім того, незважаючи на всі такі ускладнення, у всіх розглядах вихідна модель залишалася лінійною і з постійними коефіцієнтами. З одного боку, це було значною перевагою, оскільки теорія оптимального керування для лінійних систем має найпростіший вигляд. Однак з іншого боку, лінійність же була обмеженням цих моделей, і заважала проводити подальші узагальнення.

У даній роботі була зроблена спроба розглянути узагальнення вихідної моделі на випадок, коли довжина підвісу не є постійною. При цьому отримана задача розглядалася із двох різних точок зору. У першому випадку, коли передбачалося, що довжина підвісу змінюється за якимось наперед заданим законом, модель залишилася лінійною, однак система, що описувала її рух, ставала системою зі змінними коефіцієнтами. У другому випадку, коли передбачалося, що довжиною підвісу можна керувати, модель набувала вигляду так званої біафінної системи. Дотепер такі узагальнення не розглядалися. Більше того, підхід до розгляду моделі як біафінної системи є новим, і в літературі не висвітлювався.

Дослідження білінійних і біафінних систем у значній мірі використовують апарат теорії алгебр і груп Лі, тому в даній роботі приводяться основні необхідні відомості про ці математичні об'єкти.

У випадку, коли довжина підвісу – заздалегідь відома кусково-лінійна функція, отримано рішення рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, до якого зводилася система. У розглядах же відповідної біафінної системи не вдалося за допомогою використаних у роботі факторів показати факт керованості системи на всьому просторі.

Це означає, що для одержання позитивних результатів необхідно подальше дослідження біафінних і білінійних систем.

2. Постановка задачі

Розглядається двомасова динамічна модель крана у вигляді моделі «візок – вантаж».

Модель, зображена на рис. 1, описує рух візка масою m_1 і вантажу масою m_2, підвішеного на канаті довжиною l. На візок діє рушійна сила $F(t)$ і сила опору W. У моделі передбачається, що канат абсолютно гнучкий, невагомий і нерозтяжний, маса вантажу зосереджена в одній точці, коливання вантажу малі й відбуваються тільки в площині руху візка [5].

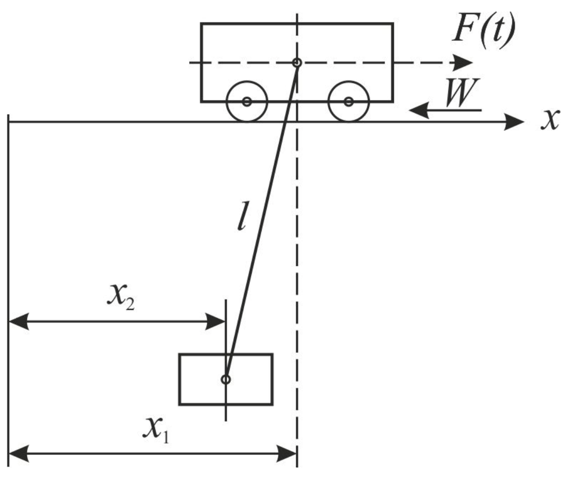

Рис. 1 – Двомасова модель «візок – вантаж»

Необхідно за мінімальний час перевезти вантаж з деякої початкової точки в задану наперед точку, при цьому швидкість вантажу в цій кінцевій точці повинна дорівнювати нулю.

Лінеаризовані рівняння руху описуваної системи будуть мати вигляд

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F(t) - W\operatorname{sign}\dot{x}_1 - \dfrac{m_2 g}{l}(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = \dfrac{m_2 g}{l}(x_1 - x_2) \end{cases}. \quad (1)$$

В якості керування вибирають рушійну силу, оскільки вибір у якості керування швидкості або прискорення візка веде до надмірного ускладнення керуючого механізму й нераціональному використанню його можливостей [1].

Уведемо нові позначення й запишемо рівняння (1) у канонічному вигляді. Нехай $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2$. Тоді (1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \dfrac{m_2 g}{m_1 l}\left(y_3 - y_1\right) + U\left(t\right) \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \dfrac{g}{l}\left(y_1 - y_3\right) \end{cases}, \tag{2}$$

де $U\left(t\right) = \dfrac{F\left(t\right) - W\mathrm{sign}y_2}{m_1}$. Тут параметром керування для зручності вважають функцію $U\left(t\right)$, що пропорційна $F\left(t\right)$.

У задачі (2) довжина підвісу передбачається постійною. Ця задача докладно розглянута й повністю розв'язана в [1]: за допомогою принципу максимуму Понтрягіна отримано вигляд оптимального керування.

3. Змінна довжина підвісу

У даній роботі зроблена спроба досліджувати модель «візок – вантаж», у якій довжина підвісу передбачається змінною.

Керування, що описує рух такої системи при малих коливаннях вантажу, має вигляд

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \dfrac{m_2 g}{m_1 l\left(t\right)}\left(y_3 - y_1\right) + U\left(t\right) \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \dfrac{g}{l\left(t\right)}\left(y_1 - y_3\right) \end{cases}. \tag{3}$$

Задача ж залишається колишньою: необхідно відшукати оптимальне за часом керування, що переводить систему (3) з однієї точки в іншу.

У даній роботі розглядаються два підходи до такого завдання. Перший припускає, що довжина підвісу – це деяка відома безперервна функція, похідна якої має розриви в заздалегідь заданих точках $t_1 \ldots t_k$. Інший підхід полягає в тому, щоб вважати довжину підвісу ще одним керуванням, і розглядати (3) як біафінну систему.

4. Дослідження системи (3) у випадку кусково-лінійного *l*(*t*)

Систему (3) легко звести до звичайного диференціального рівняння четвертого порядку: із четвертого рівняння одержуємо, що $y_1\left(t\right) = \dfrac{l\left(t\right)}{g}\dot{y}_4 + y_3 = \dfrac{l\left(t\right)}{g}\ddot{y}_3 + y_3$, а із другого, що $\dfrac{g}{l\left(t\right)}U\left(t\right) = \dfrac{g}{l\left(t\right)}\dot{y}_2 - \dfrac{m_2 g}{m_1 l\left(t\right)}\left(y_3 - y_1\right) = \dfrac{g}{l\left(t\right)}\ddot{y}_1 - \dfrac{m_2}{m_1}\ddot{y}_3$, таким чином,

$$\frac{l\left(t\right)}{g}\ddddot{y}_3 + \frac{\dot{l}\left(t\right)}{g}\dddot{y}_3 + \ddot{y}_3\left(\frac{\ddot{l}\left(t\right)}{g} - \frac{m_2}{m_1}\right) = U\left(t\right).$$

У такій постановці виписати розв'язання для довільного $l(t)$ у явному вигляді не вдалося. Тому щодо функції $l(t)$ було зроблене припущення: функція $l(t)$ кусково-лінійна, тобто $l\left(t\right) = a_i t + b_i$, $t \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$, $i = \overline{0, k-1}$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$\frac{a_i t + b_i}{g}\dddot{y}_3 + \frac{a_i}{g}\ddot{y}_3 - \frac{m_2}{m_1}\ddot{y}_3 = U(t)\cdot \tag{4}$$

Розв'язання цього рівняння представляється у вигляді суми загального розв'язання однорідного рівняння й частинного розв'язання неоднорідного. Розглянемо ці два рівняння.

Очевидно, однорідне рівняння (4) – це рівняння другого порядку щодо невідомої функції $y(t) = \ddot{y}_3(t)$.

$$\frac{a_i t + b_i}{g}\ddot{y} + \frac{a_i}{g}\dot{y} - \frac{m_2}{m_1}y = 0\cdot \tag{5}$$

Будемо шукати його розв'язання у вигляді деякої функції Беселя: $y(t) = I_0(z(t))$.

Оскільки

$$\dot{y}(t) = I_1(z(t))\dot{z}(t),\ \ddot{y}(t) = I_1(z(t))\ddot{z}(t) + \frac{I_0(z(t)) + I_2(z(t))}{2}\dot{z}(t)^2,$$

тоді (5) можна записати у вигляді

$$\frac{a_i t + b_i}{g} = \left(I_1(z(t))\ddot{z}(t) + \frac{I_0(z(t)) + I_2(z(t))}{2}\dot{z}(t)^2\right) + \frac{a_i}{g}I_1(z(t))\ddot{z}(t) - \frac{m_2}{m_1}I_0(z(t)) = 0,$$

$$\frac{I_0(z(t)) + I_2(z(t))}{2}\left(\frac{a_i t + b_i}{g}\dot{z}(t)^2\right) + I_1(z(t))\left(\frac{a_i t + b_i}{g}\ddot{z}(t) + \frac{a_i}{g}\ddot{z}(t)\right) - \frac{m_2}{m_1}I_0(z(t)) = 0\cdot$$

Це рівняння буде модифікованим рівнянням Беселя

$$z^2\ddot{I}_0(z) + z\dot{I}_0(z) - z^2(0 + I_0(z)) = 0,$$

щодо функції $I_0(z)$, якщо $\frac{a_i t + b_i}{g}\dot{z}^2 = \frac{m_2}{m_1}$. Таким чином,

$$\dot{z}(t) = \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1(a_i t + b_i)}} \Rightarrow z(t) = 2\sqrt{\frac{m_2 g(a_i t + b_i)}{m_1 a^2}}\,.$$

Аналогічно можна показати, що друга модифікована функція Беселя $K_0(z(t))$ також буде розв'язанням рівняння (5). Таким чином, загальним розв'язанням однорідного рівняння (5) буде $y_0(t) = c_{1i}I_0(z(t)) + c_{2i}K_0(z(t))$, і тоді

$$y_{3o}(t) = c_{1i}\int_{t_{i-1}}^{t}\int_{t_{i-1}}^{\tau} I_0(z(s))\,ds\,d\tau + c_{2i}\int_{t_{i-1}}^{t}\int_{t_{i-1}}^{\tau} K_0(z(s))\,ds\,d\tau\cdot$$

Для знаходження частинного розв'язання неоднорідного рівняння (4) можна скористатися формулою Коші:

$$\ddot{y}_{3r}(t) = \int_{t_{i-1}}^{t} K(t,\tau)U(\tau)\,d\tau,$$

де $$K(t,\tau) = \varphi(t)\Phi^{-1}(\tau)e_2 = \left(I_0(z)K_0(z)\right)\begin{pmatrix} I_0(z) & K_0(z) \\ \dot{I}_0(z) & \dot{K}_0(z)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримане подання для розв'язання (4).

5. Модель «візок – вантаж» як біафінна система

У задачі керованості біафінних і білінійних систем велику роль відіграють алгебри й групи Лі [6].

Систему (3) можна записати в наступному вигляді

$$\dot{y}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}y+\frac{1}{l(t)}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-\frac{m_2g}{m_1}&0&\frac{m_2g}{m_1}&0\\0&0&0&0\\\frac{m_2g}{m_1}&0&-\frac{m_2g}{m_1}&0\end{pmatrix}y+U(t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Із позначеннями $u_1(t)=\dfrac{1}{l(t)}$, $B_1=B$, $b_1=0$, $u_2(t)=U(t)$, $B_2=0$, $b_2=b$ ця система набуває вигляду біафінної системи (6).

Нехай дані постійні матриці $A,B_1,...,B_m$ в $R^{n\times n}$, постійні вектори $a,b_1,\dots b_m\in R^n$, $u(t)\in U$, де U – деякий клас функцій.

Біафінною керованою системою в R^n називається керована система вигляду

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)\big(B_ix(t)+b_i\big)\cdot \tag{6}$$

Білінійною керованою системою називається система вигляду

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)B_ix(t)\cdot \tag{7}$$

Для біафінних керованих систем вводяться поняття керованості й досяжності. Нехай $x_{\xi,u}(t)$ – розв’язання (6) з керуванням $u(t)$ при початковій умові $x(0)=\xi$.

Система (6) керована (controllable) на множині U, якщо

$$\forall\xi,\zeta\in U\exists T\ge 0,\ u(t)\in\Omega: x_{\xi,u}(t)\in U,\ x_{\xi}(T)=\zeta\cdot$$

Для заданого початкового стану $\xi\in U$

(i) множина досяжності (attainable/reachable) за час t – це

$$A_t(\xi)=\left\{x_{\xi,u}(t)\middle|u(\cdot)\in\Omega\right\},$$

(ii) множина всіх точок, досяжних за час T позначають

$$A^T(\xi)=\bigcup_{0<t\le T}A_t(\xi),$$

(iii) множиною досяжності (за вільний час) називають $A(\xi)=\bigcup_{t\ge0}A_t(\xi)$.

Система (7) володіє в точці ξ властивістю:

(i) досяжності (accessibility), якщо внутрішність множини досяжності $IntA(\xi)\ne\emptyset$. Якщо умова досяжності виконана $\forall\xi\in U$, говорять, що система має властивість досяжності на U.

(ii) сильної досяжності (strong accessibility), якщо $\forall t>0$ $IntA_t(\xi)\ne\emptyset$. Якщо це вірно $\forall\xi\ne0\in U$, то (7) задовольняє умові сильної досяжності на U.

Однак спроба дослідження системи (5) на керованість виявилася сполучена зі значними труднощами. Незважаючи на те, що спектр матриці $A_\delta=A+\delta B$, що дорівнює $\left\{0,0,-\dfrac{i\sqrt{g}\sqrt{\delta}\sqrt{m_1+m_2}}{\sqrt{m_1}},\dfrac{i\sqrt{g}\sqrt{\delta}\sqrt{m_1+m_2}}{\sqrt{m_1}}\right\}$ лежить на мнимій осі для всіх $\delta>0$, матриця A_δ не є діагоналізованою в C.

Щоб перевірити рангову умову алгебри Лі (Lie algebra rank condition, LARC), що фігурує в теоремі про достатні умови керованості білінійної системи [6], можна знайти базис цієї алгебри. У [6] для цього пропонується алгоритм LieTree, однак можливо й просто розглядати всі дужки Лі матриць нашої системи, свідомо відкидаючи лінійно залежні. Перевірка цієї умови для (5) буде предметом подальших досліджень цієї системи.

Таким чином, необхідно констатувати, що для дослідження системи (3) на керованість і для одержання оптимального за часом керування розглянутих вище теоретичних відомостей недостатньо, і для одержання позитивних результатів необхідно провести більш глибокий розгляд теорії біафінних і білінійних систем.

Висновки

У роботі розглянута двомасова модель крана «візок – вантаж» зі змінною довжиною підвісу із двох різних точок зору. Для випадку, коли довжина троса – це деяка відома функція отримано розв'язання диференціального рівняння другого порядку, до якого зводиться система, що описує рух моделі. Якщо довжина підвісу розглядається як ще одне керування в системі, система трактується як біафінна. Розглянуто визначення й деякі властивості білінійних і біафінних систем, зокрема, умову керованості.

Список використаних джерел:

1. Григоров О. В. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідйомних машин : навч. посіб. / О. В. Григоров, В. С. Ловейкін. – К. : ІЗМН, 1997. – 264 с.
2. Михеева Е. В. Критерии подобия для кабельных кранов в задаче оптимального управления движением / Е. В. Михеева // Механика и машиностроение. – 1997. – № 1. – С. 138-144.
3. Григоров О. В. Учёт силы ветра в сопротивлении перемещению груза кабельным краном / О. В. Григоров, Е. В. Михеева // Вестник ХГПУ. – 1998. – № 11. – С. 104-106.
4. Дукельский А. И. Подвесные канатные дороги и кабельные краны : моногр. / А. И. Дукельский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Л. : Машиностроение, 1966. – 481 с.
5. Смехов А. А. Оптимальное управление подъёмно-транспортными механизмами / А. А. Смехов, Н. И. Ерофеев. – М. : Машиностроение, 1975. – 239 с.
6. David L. Elliott Bilinear Control Systems / David L. Elliott. – London ; New York : Springer, 2009. – 281 p. – (Applied Mathematical Sciences).

References

1. Grigorov, O & Loveikin, V 1997, *Optymalne keruvannia rukhom mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn*, IZMN, Kyiv.
2. Mikheeva, Ye 1997, 'Kriterii podobiya dlya kabelnykh kranov v zadache optimalnogo upravleniya dvizheniem', *Mekhanika i mashinostroyeniye*, no. 1, pp. 138–144.
3. Grigorov, O & Mikheeva, Ye 1998, 'Uchet sily vetra v soprotivlenii peremeshcheniyu gruza kabelnym kranom', *Vestnik KhGPU*, no. 11, pp. 104–106.
4. Dukelskiy, A 1966, *Podvesnyye kanatnyye dorogi i kabelnyye krany*, Mashinostroyeniye, Leningrad.
5. Smekhov, A & Yerofeev, N 1975, *Optimalnoye upravleniye podyemno-transportnymi mekhanizmami*, Mashinostroyeniye, Moskva.
6. David, L 2009, 'Bilinear Control Systems', *Applied Mathematical Sciences*, Springer, London, New York.

Стаття надійшла до редакції 10 березня 2017 р.